

Die keplerschen Gesetze

Růžička, Jan
jan.ruzicka01@gmail.com

Fukala, Viktor
viktor.fukala@gmail.com

Johannes-Kepler-Gymnasium
Parlerstraße 2, Prag 6, Tschechien

Übersetzung ins Deutsche: Jana Fantová

März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Erklärung	4
2	Abstrakt	5
3	Die keplerschen Gesetze	6
4	Ein paar Worte zur historischen Bedeutung der keplerschen Gesetze	7
5	Das erste keplersche Gesetz	9
5.1	Ableitung der Umlaufbahn	9
5.2	Die Überprüfung	11
5.2.1	Die Bewegungsgleichungen in polaren Koordinaten	12
5.2.2	Bestätigung der Richtigkeit der abgeleiteten Trajektorien	15
5.2.3	Lagrange-Formalismus	17
6	Das zweite keplersche Gesetz	19
6.1	Ableitung	19
6.2	Verwendung	19
7	Das dritte keplersche Gesetz	20
8	Die Ungenauigkeiten des verwendeten Modells	22
8.1	Die Bewegung des zentralen Körpers	22
8.2	Andere Ungenauigkeiten	23
9	Hinweise	25
9.1	Porträts	25
9.2	Verwendete Quellen	25
9.3	Erstellung des Dokuments	25

1 Erklärung

Wir erklären hiermit, dass wir diese Arbeit eigenständig nur mit der Hilfe der verwendeten Quellen erstellt haben. Die Arbeit wurde von keinen Förderern oder Mentoren begleitet.

Jan Růžička Geburtsdatum: 28. August 2001
Viktor Fukala Geburtsdatum: 9. Dezember 2001

Prag, den 22. März 2019

2 Abstrakt

In dieser Arbeit leiten wir vor allem alle drei keplerschen Gesetze im Kontext der newtonschen Mechanik ab. Dabei verwenden wir verschiedene Methoden, um besser zu klären, wo die keplerschen Gesetze in der Mechanik ihren Platz haben. Im Interesse einer tieferen Einsicht in die Himmelsmechanik, befassen wir uns auch mit anderen Aspekten der Bewegung der Planeten. Dort, wo es nützlich ist und wo es das Verständnis unterstützt, ergänzen wir den Text mit Illustrationen.

3 Die keplerschen Gesetze

Zum Gegenstand unserer Forschung werden vor allem die folgenden drei Gesetze.

Das erste keplersche Gesetz

Die Planeten umlaufen auf den einem Kreis ähnlichen elliptischen Bahnen so, dass die Sonne in einem der Brennpunkte jeder solchen Ellipse ist.

Das zweite keplersche Gesetz

Jeder Planet hat während seines Umlaufs konstante Flachgeschwindigkeit. Die von einem Leitstrahl des Planeten ausgefüllte Fläche für einen Zeitabschnitt mit gegebener Dauer ist also immer gleich groß.

Das dritte keplersche Gesetz

Der Quotient aus der dritten Potenz der Haupthalbachse der Umlaufbahn und dem Quadrat der Umlaufperiode ist für alle Planeten gleich.

4 Ein paar Worte zur historischen Bedeutung der keplerschen Gesetze

Versuchen wir jetzt die keplerschen Gesetze in den historischen Kontext einzusetzen, um mindestens grobe Vorstellung zu haben, was Kepler zu seiner Zeit zur Verfügung stand.

Johannes Kepler war der deutsche Astronom, der im Jahre 1571 in Weil der Stadt in Baden-Württemberg geboren war und im Jahre 1630 in Regensburg starb. In seiner Arbeit widmete er sich Mathematik, Mechanik, Astronomie und Astrologie. Am bekanntesten sind sicher gerade seine Gesetze.

Um die Jahrhundertwende kam er auch wegen seiner von Kopernikus beeinflussten Ideen nach Prag. Kopernikus, der zwischen den Jahren 1473 und 1543 lebte, konnte er zwar nicht persönlich treffen, aber in seinen drei Gesetzen ist klar zu erkennen, dass er von Kopernikus' Werk nicht wenig beeinflusst wurde. In Prag begann er mit dem dänischen Astronomen Tycho Brahe zusammenzuarbeiten, der aber zum Unglück im Herbst 1601 starb. Kepler konnte aber die Brahes damals sehr genaue Beobachtungen benutzen. Dank seiner präzisen Forschung der Bewegung vor allem des Planeten Mars formulierte er nach einigen Jahren die ersten zwei Gesetze. Die publizierte er in dem Werk *Astronomia Nova* im Jahre 1609. Sein drittes Gesetz folgte ein paar Jahre später und Kepler veröffentlichte ihn in seinem Werk *Harmonices Mundi* im Jahre 1619.

Der Wert der Keplers Erkenntnis ruht auch in der Eröffnung des Weges zu den folgenden Erfindungen in Astronomie, Physik und Mathematik. In den Jahren 1643 – 1727 lebte der englische Mathematiker, Physiker und Astronom Isaac Newton. Für ihn waren die keplerschen Gesetze eine bedeutende Grundlage für Aufstellen des Gesetzes der allgemeinen Gravitation. Johannes Kepler wurde dadurch zu einem der führenden Schöpfer der wissenschaftlichen Revolution des 16. und 17. Jahrhunderts.

Dann folgte Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813). Er kam mit eigener Formulierung der newtonschen Mechanik und auf diese Weise zeigte er, dass mit newtonscher Mechanik bei weitem nicht endet. Formalismus von Lagrange wurde später wichtig für viele Bereiche der modernen Physik. Lagrange befasste sich mit der Himmelsmechanik, er ist für seine fünf Lagranges Punkte bekannt, in denen sich ein relativ kleiner Körper seine Lage hinsichtlich des Systems von zwei sich gegenseitig umkreisenden großen Körpern bewahrt.

Auch trotzdem, dass Newtons Zutritt oder seine Reformulierungen mehr als zwei Jahrhunderte anerkannt worden waren, entwickelte sich im 19. Jh. Theorie von Elektromagnetismus, was wegen der Differenzen in Beschreibung des Übergangs unter den Inertialsystemen erst mit der Entstehung der speziellen (1905) und der allgemeinen (1915) Relativitätstheorie gipfelte. Dafür sind wir vor allem A. Einstein dankbar. Einstein hat mit Kepler viel Gemeinsames. Beide verschoben Physik um ein großes Stück vorwärts. Beide waren in Baden-Württemberg geboren, Einstein in Ulm, und beide verbrachten einige Jahre in Prag.

Der Einzug der Relativität veränderte die Ansehungsweise an fast alle physikalischen Systeme. Auch die realen Bahnen der Planeten werden deutlich von Relativitätseffekten beeinflusst. Ein wichtiges Beispiel ist, dass die Einsteins Theorie das Tempo der Präzession (Verschiebung) der Umlaufbahn des Planeten Merkur, dessen beobachteter Wert nicht in Übereinstimmung mit der newtonschen Vorhersage war, richtig vorhersagen konnte. Unbedeutende Abweichungen darin, was drei Jahrhunderte früher Kepler entdeckt hatte, halfen die Relativitätstheorie zu unterstützen, die heute einer der Gründe der modernen Physik ist.

In unserer Arbeit zeigen wir, wie die keplerschen Gesetze aus newtonschen Vorhersagen abgeleitet werden können. Auf diese Weise demonstrieren wir, dass keplersche Kenntnisse mit newtonschen Kenntnissen in Übereinstimmung sind, was damals die wichtigste Richtschnur sein könnte.

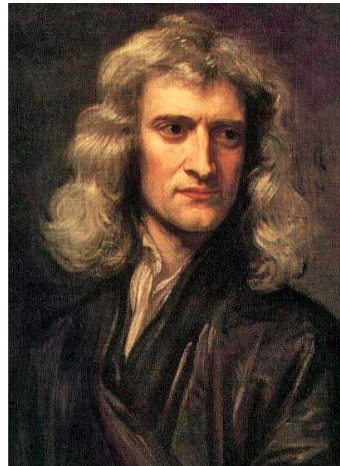
Mit der Hilfe der newtonschen Mechanik und des newtonschen Gravitationsgesetzes leiten wir jetzt alle drei keplerschen Gesetze ab.



Johannes Kepler (1571 – 1630)



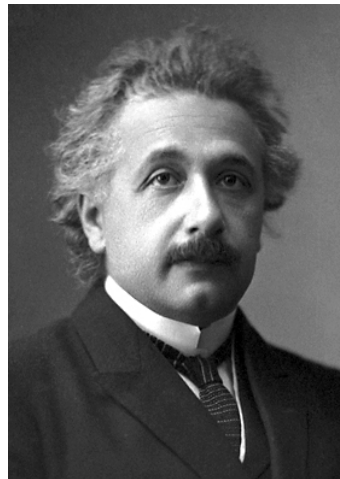
Tycho Brahe (1546 – 1601)



Isaac Newton (1643 – 1727)



Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813)



Albert Einstein (1879 – 1955)

5 Das erste keplersche Gesetz

Von drei keplerschen Gesetzen hat das erste wohl die einfachste Formulierung, aber es ist am schwierigsten es abzuleiten. In diesem Kapitel zeigen wir zuerst, wie die elliptische Bahn genau aussehen sollte. Wir erkennen, dass unsere Ableitung in manchen Details in Zweifel gestellt werden kann, und deshalb geben wir den zweiten Teil von diesem Kapitel zu, in dem wir die Bewegungsgleichungen für die Bewegung in dem radialen Gravitationsfeld formulieren und überprüfen, dass die früher abgeleitete elliptische Bahn diese Gleichungen erfüllt.

5.1 Ableitung der Umlaufbahn

Beide Körper vereinfachen wir auf homogene Kugeln. Die wirken mit dergleichen Gravitationskraft wie Punktmassen. Wir vernachlässigen auch den Einfluss der anderen Körper in dem Planetensystem, was wir uns leisten können, weil sie die Masse einer niedrigeren Ordnung gewöhnlich haben und auch trotzdem, dass sie sich zum umlaufenden Körper näher befinden können, wirken sie mit der Gravitationskraft einer niedrigeren Ordnung. Im Verlauf dieser Ausrechnung vernachlässigen wir auch die Bewegung des zentralen Körpers, die wir später rückwirkend einrechnen.

Den Ursprung des Relativsystems setzen wir in die Mitte des zentralen Körpers ein. Der Satellitenleitstrahl soll r sein, der Winkel, den er mit der Relativachse einschließt, soll φ sein. Das System soll mechanische Energie E und Drehimpuls L haben, der auf die durch den zentralen Körper durchgehenden Achse bezogen wird. Der Satellit soll Masse m und der zentrale Körper Masse M haben. Wir setzen $m \ll M$ voraus, und so vernachlässigen wir die Bewegung des zentralen Körpers. Wir arbeiten also mit dem Modell, wo auf den zentralen Körper keine Kraft wirkt und die einzige auf den Satelliten wirkende Kraft mit newtonschem Gravitationsgesetz gegeben ist.

Von den Erhaltungssätzen

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}, \quad (1)$$

$$L = mr^2\dot{\varphi}, \quad (2)$$

wo E und L Konstanten sind. Die senkrechten Geschwindigkeitskomponenten in polaren Koordinaten sind \dot{r} und $r\dot{\varphi}$. Zusammen mit der Geschwindigkeit v bilden sie ein rechtwinkliges Dreieck, und darum gilt

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

Wir haben also

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \quad (4)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}. \quad (5)$$

Jetzt machen wir die Substitution

$$u = \frac{1}{r} \quad (6)$$

$$dr = -\frac{1}{u^2} du. \quad (7)$$

Nach der Bearbeitung und Einsetzen in (5) haben wir

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2}u^2 + 2GMu}. \quad (8)$$

Nach der Bearbeitung von (4) haben wir

$$\varphi = \int \frac{L}{m}u^2 dt = \int \frac{L}{m}u^2 \cdot \frac{dt}{du} du. \quad (9)$$

Aber

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} \quad (10)$$

und davon

$$\varphi = \int -\frac{L}{m} \cdot \frac{1}{\dot{r}} du. \quad (11)$$

Für \dot{r} ergänzen wir das Quadrat auf

$$\dot{r} = \frac{L}{m} \cdot \sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \frac{G^2M^2m^4}{L^4} - \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}. \quad (12)$$

Jetzt machen wir zwei Substitutionen. Die erste ist natürlich.

$$\alpha = \frac{L^2}{GMm^2} \quad (13)$$

Die zweite machen wir wegen des Integrals. In ihm wollen wir das Verhältnis von zwei Quadraten erhalten, also

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{2Em}{L^2} + \frac{1}{\alpha^2}. \quad (14)$$

Daraus folgt

$$\beta^2 = \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} + 1. \quad (15)$$

Alles setzen wir ins Integral ein und wir haben

$$\varphi = \int -\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \left(u - \frac{1}{\alpha}\right)^2}} du \quad (16)$$

oder

$$\varphi = \int -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}u - \frac{1}{\beta}\right)^2}} du. \quad (17)$$

Dies ist genau das Integral von Arcus Cosinus, dabei

$$\arccos\left(\frac{\alpha}{\beta}u - \frac{1}{\beta}\right)' = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}u - \frac{1}{\beta}\right)^2}}. \quad (18)$$

Wenn wir also das Integral auf diese Weise bestimmen, haben wir

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\alpha}{\beta}u - \frac{1}{\beta}\right) + c, \quad (19)$$

woher wir nach Bearbeitung und nach dem Einsetzen aus (6) ausdrücken

$$r = \frac{\alpha}{1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c)}. \quad (20)$$

Nach der Umbenennung mancher Parameter erkennen wir die Gleichung

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (21)$$

Das ist die Gleichung der nicht degenerierten Kegelschnittlinie mit dem Brennpunkt im Ursprung der Koordinaten, wo $r_0 = \alpha$ Parameter, $\epsilon = \beta$ Exzentrizität und $\varphi_0 = c$ Winkel ist, zu dem wir die Winkelkomponente unserer Koordinaten beziehen.

Für $\epsilon = 0$ handelt sich um einen Kreis, für $0 < \epsilon < 1$ um eine Ellipse, bei $\epsilon = 1$ wird die Umlaufbahn zur Form der Parabel und endlich bei $1 < \epsilon$ wird sie zur Hyperbel (siehe Bild 1).

Weil alle Planeten um die Sonne *umlaufen* (d.h. sie entfernen sich nicht ins Unendliche), muss ihre Bahn der Kreis oder die Ellipse sein.

5.2 Die Überprüfung

Die Ableitung der Trajektorie der Körper in der letzten Sektion scheint mindestens aus dem Grund in Ordnung zu sein, dass wir ein sinnvolles Ergebnis erreicht haben. Und zwar wenn der Planet um den zentralen Körper umläuft, kam es uns heraus, dass der Planet auf der Ellipsenbahn umläuft, wie Johannes Kepler postulierte.

Wir haben aber nicht zu viel darauf geachtet, ob \dot{r} aus (5) als die positive oder als die negative Wurzel ausgedrückt werden sollte, oder darauf, was passiert, wenn \dot{r} Null sein wird. Im Falle, dass unser Ergebnis richtig ist, ist \dot{r} manchmal positiv, manchmal negativ und manchmal auch Null, was zum Misstrauen in unser Verfahren führen kann.

Eine Möglichkeit wäre, unser Verfahren mehr zu formalisieren, d.h. alle diese Fälle zu überprüfen. Wir glauben aber, dass unser Ergebnis richtig ist, so dass wir den folgenden alternativen Zutritt verwenden

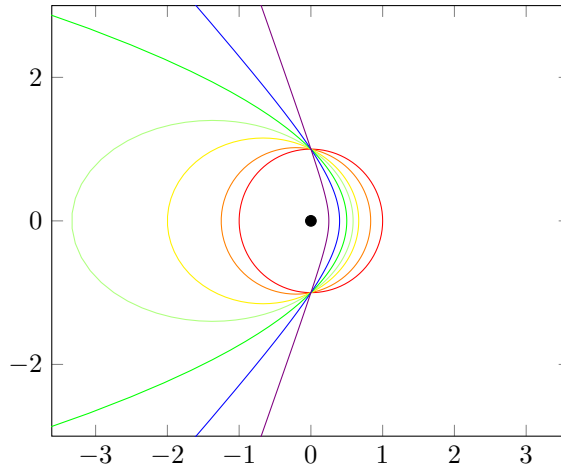


Abbildung 1: Beispiele der Bahnen der um den Körper im Ursprung umlaufenden Körper. $r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$ a $\epsilon \in \{0,0, 0,2, 0,5, 0,7, 1,0, 1,5, 3,0\}$

können. Wir setzen die Bewegungsgleichungen in polaren Koordinaten an, die die Bewegung der Planeten bestimmen, und wir überprüfen, ob unsere früher gefundene Lösung diesen Gleichungen entspricht.

Der Grund dafür, dass wir die erwähnten Gleichungen schon von Anfang an nicht gelöst haben, ist einfach der, dass es sich um Gleichungen der zweiten Ordnung handelt, und es ist schwierig sie zu lösen. Ihr Formulieren ist aber ganz einfach, so dass wenn wir schon die Lösung kennen, ist es nicht kompliziert, ihre Geltung zu überprüfen.

5.2.1 Die Bewegungsgleichungen in polaren Koordinaten

In den kartesischen Inertialsystemen gilt das erste newtonsche Bewegungsgesetz, wenn also auf einen Körper keine reale Kraft wirkt, ist sein Geschwindigkeitsvektor konstant. Generalisierung bildet dann das zweite newtonsche Gesetz, laut dem in dem Inertialsystem Beschleunigungsvektor (d.h. die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit) mit dem Vektor der auf den Körper wirkenden Kraft durch Beziehung¹

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (22)$$

verbunden ist.

Es ergab sich aber, dass für das Problem der Körperbewegung in der Gravitationswirkung für uns einfacher ist, die polaren Koordinaten zu verwenden. Die polaren Koordinaten bilden aber kein Inertialsystem gerade darum, dass in ihnen das erste newtonsche Gesetz nicht gilt. Nehmen wir z.B. einen Körper mit einem beliebigen Ausgangspunkt, der in der Zeitpunkt Null

$$(\dot{r}, \dot{\varphi}) = (0, \dot{\varphi}_0) \quad (23)$$

für irgendeinen $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ hat. Im Falle, dass auf diesen Körper keine reale Kraft wirkt, beginnt sich \dot{r} zu vergrößern und $\dot{\varphi}$ zu verkleinern, weil die Trajektorie laut dem ersten newtonschen Gesetz eine Gerade sein wird (siehe Bild 2). Im Gegensatz dazu, damit es zur Veränderung der zeitlichen Ableitungen der Koordinaten nicht kommt, muss auf den Körper eine reale Zentripetalkraft wirken.

Unser Ziel in den folgenden Absätzen deshalb ist, die Beziehung zwischen realen Kräften und der zweiten zeitlichen Ableitungen der polaren Koordinaten zu finden, d.h. ein Äquivalent von zwei oben genannten newtonschen Gesetzen zu finden. Wir nutzen konkret die Gültigkeit der newtonschen Gesetze in dem kartesischen Inertialsystem und die Beziehungen bringen wir in die Form in den polaren Koordinaten.

¹Dies gilt nur wenn sich die Masse nicht ändert. Allgemeiner nämlich $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a}$. Im Falle, dass sich aber die Masse ändert, sprechen wir meistens schon über einen anderen Körper. Die Vorteile $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ sehen deshalb vor allem erst in der speziellen Relativitätstheorie, wo wir $F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dm_0}{d\tau}u^\mu + m_0a^\mu$ haben.

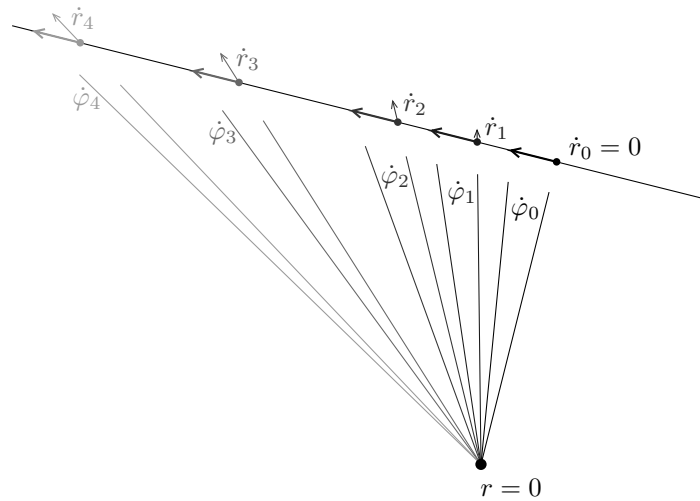


Abbildung 2: Veränderung \dot{r} und $\dot{\varphi}$ für ein freies Teilchen. Die Ausgangswerte sind $\dot{r}_0 = 0$ und $\dot{\varphi}_0 \neq 0$. Im Verlauf der Zeit wird \dot{r} größer und $\dot{\varphi}$ kleiner, so dass $\ddot{r} \geq 0$ und $\ddot{\varphi} \leq 0$.

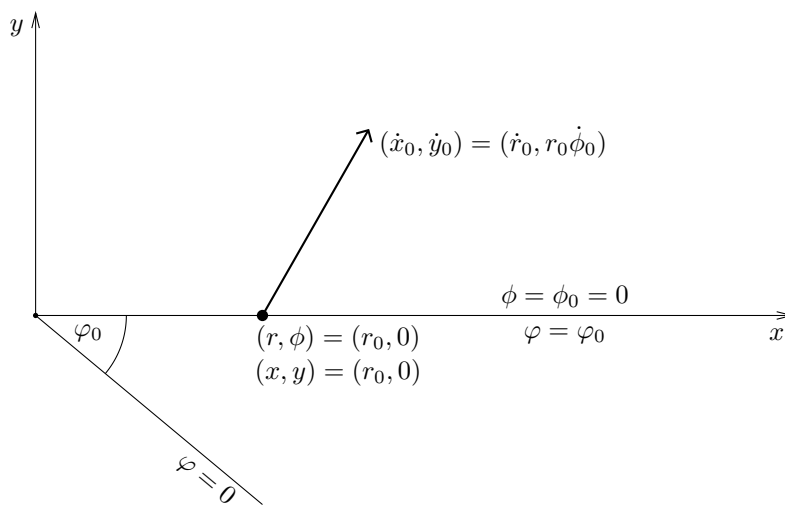


Abbildung 3: Die Position und die Geschwindigkeit eines Teilchens in den eingeführten Koordinatensystemen.

Haben wir einen solchen Körper in der Ausgangsposition (r_0, φ_0) und mit den Anfangswerten der zeitlichen Ableitungen seiner polaren Koordinaten $(\dot{r}_0, \dot{\varphi}_0)$, dass auf ihn im Ausgangsmoment die Kraft F_r in der Richtung des Leitstrahls wirkt und die auf den Leitstrahl senkrechte Kraft F_t wirkt. F_r halten wir für positiv, wenn die Kraft in der Richtung vom wachsenden r ist, und F_t halten wir für positiv, wenn die Kraft in der Richtung vom wachsenden φ ist. In entgegengesetzten Fällen für negativ.

Nehmen wir zuerst zur Vereinfachung ein zweite Polarsystem der Koordinaten r, ϕ gegeben mit der Gleichung

$$\phi = \varphi - \varphi_0. \quad (24)$$

Dann gilt

$$\phi_0 = 0 \quad (25)$$

und

$$\dot{\phi} = \dot{\varphi}, \quad (26)$$

so dass auch die Anfangswerte der zeitlichen Ableitungen sowohl als auch alle zeitlichen Ableitungen einer höheren Ordnung einander gleich sind.

Um das erste newtonsche Gesetz ausnutzen zu können, führen wir das mit der Transformation gegebene kartesische Inertialsystem ein.

$$x = r \cos \phi \quad (27)$$

$$y = r \sin \phi. \quad (28)$$

Jetzt muss

$$x_0 = r_0 \quad (29)$$

$$y_0 = 0 \quad (30)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \quad (31)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{r}_0 \quad (32)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \quad (33)$$

$$\dot{y}_0 = r_0 \dot{\phi}_0. \quad (34)$$

In diesem Augenblick nutzen wir das zweite newtonsche Gesetz aus. Weil F_r in der Richtung von x und F_t in der Richtung y wirkt, leiten wir aus dem zweiten newtonschen Gesetz

$$\ddot{x} = \frac{F_r}{m} \quad (35)$$

$$\ddot{y} = \frac{F_t}{m} \quad (36)$$

ab, wo m die Masse des bedachten Körpers ist.

Wir wollen \ddot{r}_0 und $\ddot{\phi}_0$ bestimmen. Wir haben

$$\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (37)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} \quad (38)$$

$$= \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \quad (39)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(\dot{y}x + \dot{y}\dot{x} - \dot{y}\dot{x} - y\ddot{x})(x^2 + y^2) - (\dot{y}x - y\dot{x})(2x\dot{x} + 2y\dot{y})}{(x^2 + y^2)^2} \quad (40)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(\dot{y}\dot{x} - y\ddot{x})(x^2 + y^2) - (\dot{y}x - y\dot{x})(2x\dot{x} + 2y\dot{y})}{(x^2 + y^2)^2} \quad (41)$$

$$\ddot{\phi}_0 = \frac{\frac{F_t r_0^3}{m} - 2r_0^3 \dot{r}_0 \dot{\phi}_0}{r_0^4} \quad (42)$$

$$\ddot{\phi}_0 = \frac{F_t}{m r_0} - \frac{2\dot{r}_0 \dot{\phi}_0}{r_0}. \quad (43)$$

Und für \ddot{r}

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (44)$$

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (45)$$

$$\ddot{r} = \frac{(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y})\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \quad (46)$$

$$\ddot{r} = \frac{(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y})(x^2 + y^2) - (x\dot{x} + y\dot{y})^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (47)$$

$$\ddot{r} = \frac{(x\ddot{x} + y\ddot{y})(x^2 + y^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (48)$$

$$\ddot{r}_0 = \frac{\frac{F_r r_0^3}{m} + r_0^4 \dot{\phi}_0^2}{r_0^3} \quad (49)$$

$$\ddot{r}_0 = \frac{F_r}{m} + r_0 \dot{\phi}_0^2. \quad (50)$$

Aus den Gleichungen (43) und (50) ergibt sich weiter

$$\ddot{\phi}_0 = \frac{F_t}{mr_0} - \frac{2\dot{r}_0\dot{\phi}_0}{r_0} \quad (51)$$

$$\ddot{r}_0 = \frac{F_r}{m} + r_0 \dot{\phi}_0^2. \quad (52)$$

Zeit $t = 0$ haben wir aber willkürlich gewählt, so dass in jedem Moment der Bewegung des Körpers gilt

$$\ddot{\phi} = \frac{F_t}{mr} - \frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} \quad (53)$$

$$\ddot{r} = \frac{F_r}{m} + r\dot{\phi}^2, \quad (54)$$

wo aber schon F_t und F_r die auf den Leitstrahl senkrechten und mit dem Leitstrahl parallelen Kräfte im Moment, in dem die Bewegungsgleichungen gelten sollen, sind.

Die abgeleiteten Gleichungen sind einer zweiten Ordnung, so dass sie die Entwicklung der Lage des Körpers eindeutig bestimmen, wenn die Anfangswerte der Koordinaten und ihrer ersten zeitlichen Ableitungen gegeben werden.

5.2.2 Bestätigung der Richtigkeit der abgeleiteten Trajektorien

In unserem Modell setzen wir bloß die Wirkung der Anziehungsgravitationskraft des zentralen Körpers auf den anderen Körper voraus. Die Bewegungsgleichungen haben darum die Form

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} \quad (55)$$

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + r\dot{\phi}^2. \quad (56)$$

Die Bewegungsgleichungen zusammen mit den Anfangsbedingungen bestimmen die Bewegung des Körpers eindeutig, weil für eine passende Wahl von c die Anfangsbedingungen erfüllt sind, reicht es zu überprüfen, dass die gefundene Lösung

$$r = \frac{\alpha}{1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c)} \quad (57)$$

den Bewegungsgleichungen entspricht. In ihnen erscheinen die Größen r , \dot{r} , \ddot{r} , $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$. Alle von ihnen drücken wir in der Abhängigkeit von φ aus. Mit der Hilfe von φ haben wir r ausgedrückt, so dass wir auch $\dot{\varphi}$ ausdrücken können, denn

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}. \quad (58)$$

Wenn wir dann die Ableitung mancher Größe nach der Zeit finden wollen, können wir stattdessen ihre Ableitung nach φ mit $\dot{\varphi}$ multiplizieren. Deshalb sind wir fähig, alle dürftigen Größen als Funktion φ auszudrücken.

Wir haben

$$\dot{\varphi} = \frac{L(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2}{m\alpha^2} \quad (59)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} \quad (60)$$

$$= \frac{\alpha \cdot \beta \sin(\varphi - c)}{(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2} \cdot \frac{L(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2}{m\alpha^2} \quad (61)$$

$$= \frac{L\beta}{m\alpha} \cdot \sin(\varphi - c) \quad (62)$$

$$\ddot{r} = \frac{L^2\beta \cos(\varphi - c)(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2}{m^2\alpha^3} \quad (63)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2L^2\beta \sin(\varphi - c)(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^3}{m^2\alpha^4}. \quad (64)$$

Daraus

$$-\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} = -2 \cdot \frac{L\beta}{m\alpha} \cdot \sin(\varphi - c) \cdot \frac{L(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2}{m\alpha^2} \cdot \frac{1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c)}{\alpha} \quad (65)$$

$$= -\frac{2L^2\beta \sin(\varphi - c)(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2}{m^2\alpha^4} \quad (66)$$

$$= \ddot{\varphi} \quad (67)$$

und

$$-\frac{GM}{r^2} + r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{\alpha^2} \cdot (1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2 + \frac{\alpha}{1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c)} \cdot \frac{L^2(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^4}{m^2\alpha^4} \quad (68)$$

$$= \frac{(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2}{\alpha^2} \cdot \left(-GM + \frac{L^2}{m^2\alpha} \cdot (1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c)) \right) \quad (69)$$

$$= \frac{(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2}{\alpha^2} \cdot \left(-\frac{L^2}{m^2\alpha} + \frac{L^2}{m^2\alpha} \cdot (1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c)) \right) \quad (70)$$

$$= \frac{L^2\beta \cos(\varphi - c)(1 + \beta \cdot \cos(\varphi - c))^2}{m^2\alpha^3} \quad (71)$$

$$= \ddot{r}. \quad (72)$$

Jetzt haben wir festgestellt, dass die mit der Kurve (57) gegebene Trajektorie der Wirkung der in den Bewegungsgleichungen berücksichtigten radialen Gravitationskraft entspricht.

Wenn wir die Bahn eines konkreten Körpers feststellen wollen, brauchen wir die Konstanten α , β und c zu bestimmen. Ihr Wert hängt von den Anfangsbedingungen der Bewegung des Körpers ab, also davon, wo sich der Körper befindet und welche Geschwindigkeit er hat. Die Beziehungen für α und β haben wir durchweg

mit ihren Definitionen gegeben – wir nutzen in ihnen Wert E und L aus. Zum Ausrechnen von c verwenden wir die anderen Anfangsbedingungen, wie z.B. den Lagewinkel am Anfang, dessen Wert sich weder in L noch in E spiegelt. Die Beziehung für die Konstante c führen wir nicht ein, weil bei ihr an dem Zeichen mancher Größen liegt, was allgemeine Beziehung enorm kompliziert macht. Und darüber hinaus hat der Wert von c keinen Einfluss auf die Form der Trajektorie, er bestimmt nur ihr Umdrehen in dem gewählten Koordinatensystem. Wir bestätigen im Gegensatz als allgemein geltende Regel, dass wenn wir die Bahn des gegebenen Planeten manuell bestimmen sollten, ist es praktischer, c getrennt in jeder Rechenaufgabe abzuleiten.

Bevor wir die Diskussion über die Parameter der der allgemeinen Bahnen verlassen, zeigen wir noch kurz, dass in der Definition von β β^2 keinen negativen Wert annehmen kann.

$$\beta^2 = \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} + 1 \quad (73)$$

$$= \frac{2}{G^2M^2m^3} \cdot \left(-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 \right) \cdot m^2r^4\dot{\varphi}^2 + 1 \quad (74)$$

$$= \frac{\dot{r}^6\dot{\varphi}^2}{G^2M^2} - \frac{2r^3\dot{\varphi}^2}{GM} + \frac{r^6\dot{\varphi}^4}{G^2M^2} + 1 \quad (75)$$

$$= \frac{\dot{r}^6\dot{\varphi}^2}{G^2M^2} + \left(\frac{r^3\dot{\varphi}^2}{GM} - 1 \right)^2 \geq 0 \quad (76)$$

5.2.3 Lagrange-Formalismus

Unser Bemühen die Bewegung der Planeten zu beschreiben, hat sich bisher an die newtonschen Bewegungsgesetze angelehnt. Wir möchten aber zeigen, dass es auch einen anderen Weg gibt. Die Entwicklung des Planetensystems beschreiben wir jetzt so, wie es Lagrange machen konnte.

Wir führen also ein Lagrangian ein als Unterschied der kinetischen und potentiellen Energie.

$$L = T - U \quad (77)$$

$$L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{GMm}{r}. \quad (78)$$

Weiter verwenden wir die Euler-Lagrange-Gleichung.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (79)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (80)$$

Also

$$\frac{d}{dt} [mr^2\dot{\varphi}] = 0 \quad (81)$$

$$\frac{d}{dt} [m\dot{r}] - m\dot{\varphi}^2 + \frac{GMm}{r^2} = 0. \quad (82)$$

Wir können beachten, dass die Gleichung (81) dem Drehimpulserhaltungssatz entspricht. Die Gleichungen bearbeiten wir weiter.

$$2mrr\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 0 \quad (83)$$

$$m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 + \frac{GMm}{r^2} = 0 \quad (84)$$

Das sind aber die schon früher abgeleiteten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \quad (85)$$

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + r\dot{\varphi}^2. \quad (86)$$

Dieser Zutritt hat uns ein bisschen mehr gezeigt, worin der Kern des ganzen Problems besteht. Eine Gleichung haben wir aus dem Drehimpulserhaltungssatz gewonnen. Die Arbeit mit der zweiten Gleichung ist ein

bisschen komplizierter. Wir können die Erhaltung der mechanischen Energie verwenden, wo wir aber den quadratischen kinetischen Teil gewinnen, was die Gleichung noch komplizierter macht. Anstatt des Energieerhaltungssatzes bietet sich die Bewegungsgleichung für \ddot{r} an, aber das ist die differentiale Gleichung zweiter Ordnung, so dass sie nicht einfach gelöst wird.

6 Das zweite keplersche Gesetz

Das zweite keplersche Gesetz sagt, dass der Leitstrahl des Planeten in irgendeinem konstanten Zeitabschnitt immer die gleiche Fläche aufzeichnet, befindet es sich der Planet in jedem beliebigen Punkt seiner Umlaufbahn.

Intuitiv heißt das, dass sich der Planet schneller in der Sonnennähe bewegt, wo der Leitstrahl kürzer ist, und langsamer in der Sonnenferne, wo der Leitstrahl länger ist. Für uns bedeutet das zu zeigen, dass auch wenn sich die Geschwindigkeit des Planeten und die Länge des Leitstrahls ändern, ist die Flachgeschwindigkeit, d.h. die mit dem Leitstrahl in einem Zeitabschnitt umschriebene Fläche, konstant.

6.1 Ableitung

Erwähnen wir den Drehimpulserhaltungssatz, der sagt, dass

$$L = mr^2\dot{\varphi} \quad (87)$$

im Rahmen eines geschlossenen Systems konstant ist.

Nehmen wir jetzt die mit dem Leitstrahl in kurzem Zeitabschnitt dt umschriebene Fläche, wo er einen kleinen Winkel $d\varphi$ umschreibt. Die ist

$$dS = \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi, \quad (88)$$

und die Flachgeschwindigkeit ist also

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad (89)$$

Erinnern wir uns daran, dass

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (90)$$

Wir haben also

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}, \quad (91)$$

wo L und auch m Konstanten sind. Das wollten wir zeigen.

6.2 Verwendung

Dank der Ableitung des ersten keplerschen Gesetzes kennen wir zwar die Umlaufbahnen der Körper, aber wir wissen nicht, wie genau sich die Körper auf diesen Bahnen in der Zeit bewegen. Es passt uns aber das zweite keplersche Gesetz.

Haben wir nämlich den Bahnabschnitt von φ_1 bis φ_2 . Dann wissen wir, dass die Zeit, für die der Körper durch den Abschnitt durchfliegt, ist

$$t = \frac{2mS}{L} = \frac{2m}{L} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dS = \frac{2m}{L} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}r^2 d\varphi, \quad (92)$$

wo S den Flächeninhalt des mit dem gewählten Abschnitt umschlossenen Ausschnitts bezeichnet.

7 Das dritte keplersche Gesetz

Das dritte keplersche Gesetz spricht über die Beziehung der Dimension der Ellipsen- oder der Kreisbahn und der Umlaufperiode. Beides drücken wir hier mit der Hilfe der schon eingeführten Größen aus. Das Aufschreiben der Ellipse in den polaren Koordinaten schreiben wir kartesisch, wir drücken die Längen der Halbachsen aus und mit deren Hilfe auch die Umlaufperiode aus.

Für die Ellipse oder den Kreis haben wir die Exzentrizität $0 \leq \epsilon < 1$. Die Gleichung der Bahn formen wir in die kartesischen Koordinaten um. Weil die Konstante c die Form der Bahn nicht ändert, legen wir zur Vereinfachung $c = 0$.

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cdot \cos(\varphi)} \quad (93)$$

$$r + \epsilon r \cos(\varphi) = \alpha \quad (94)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon x = \alpha \quad (95)$$

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\alpha\epsilon x + \epsilon^2 x^2 \quad (96)$$

$$x^2(1 - \epsilon^2) + 2\alpha\epsilon x + y^2 = \alpha^2 \quad (97)$$

$$\left(x\sqrt{1 - \epsilon^2} + \frac{\alpha\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}\right)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} + \alpha^2 \quad (98)$$

$$\left(x\sqrt{1 - \epsilon^2} + \frac{\alpha\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}\right)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \epsilon^2} \quad (99)$$

$$\left(x \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{\alpha} + \epsilon\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{\alpha} \cdot y\right)^2 = 1 \quad (100)$$

Die Halbachse in der Richtung der Achse x hat also die Länge

$$\sigma_x = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} \quad (101)$$

und die Halbachse in der Richtung der Achse y die Länge

$$\sigma_y = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (102)$$

Wir können also den Flächeninhalt ausrechnen, den die Ellipse umschließt.

$$S = \pi\sigma_x\sigma_y = \frac{\pi\alpha^2}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} \quad (103)$$

Die Periode ist die Zeit, für die der Planet einen ganzen Umlauf macht und zurück in die Ausgangsposition kommt. Er umschreibt die Fläche mit dem Flächeninhalt S , und darum laut dem Nachtrag zum zweiten keplerschen Gesetz gilt

$$T = \frac{2mS}{L}, \quad (104)$$

wo T die Periode des Umlaufs des Körpers ist.

Die Periode drücken wir deshalb aus als

$$T = \frac{2m\pi\alpha^2}{L(1 - \epsilon^2)^{3/2}}. \quad (105)$$

Weil $\sqrt{1 - \epsilon^2} \geq 1 - \epsilon^2$, liegt die Halbachse in der Richtung der Achse x oder im Falle des Kreises hat die Bahn nur einen konstanten Halbmesser und keine Halbachsen. σ_x rechnen wir also als die Länge der Haupthalachse aus. In diesem Fall ist der Quotient aus der dritten Potenz der Länge der Halbachse und dem Quadrat der Umlaufperiode

$$\frac{\sigma_x^3}{T^2} = \frac{L^2}{4m^2\pi^2\alpha}. \quad (106)$$

Mit der Verwendung der Definition der Konstante α

$$\frac{\sigma_x^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \quad (107)$$

Dieses Verhältnis hängt nicht davon ab, wie die Bahn des konkreten Körpers aussieht – wenn die Körper um einen gegebenen zentralen Körper umlaufen, ist für alle diese umlaufenden Körper dieses Verhältnis gleich, weil sich die Masse M des zentralen Körpers nicht ändert. Auf diese Weise haben wir das dritte keplersche Gesetz abgeleitet.

8 Die Ungenauigkeiten des verwendeten Modells

In unseren Überlegungen haben wir oft die reale Situation vereinfacht. In diesem Teil wollten wir deshalb manche Ungenauigkeiten benennen und mindestens in manchen Fällen ihre Lösung andeuten.

8.1 Die Bewegung des zentralen Körpers

Wir haben vorausgesetzt, dass sich der zentrale Körper nicht bewegt. Das ist aber nur Vereinfachung, weil in der Wirklichkeit auch der zentrale Körper mit dem anderen Körper angezogen wird.

Für unser polare Koordinatensystem nehmen wir ein Schwerpunktinertialsystem, also das System, in dem der Schwerpunkt von unserem Zweikörpersystem in der Ruhe ist. Dieses System ist ein Inertialsystem laut dem Impulserhaltungssatz. Der Anfang unseres Koordinatensystems wird gerade in diesem Schwerpunkt sein.

Wir brauchen die Bezeichnung für die Koordinaten des zentralen Körpers. Wir verwenden R und Φ . Weil sich der Schwerpunkt des Systems immer im Ursprung befindet, gilt

$$mr = MR. \quad (108)$$

Die Mittelpunkte beider Körper zusammen mit dem Ursprung der Koordinaten liegen immer auf einer Linie, so dass eine andere nützliche Beziehung ist

$$\dot{\varphi} = \dot{\Phi}. \quad (109)$$

Wie ursprünglich, können wir auch diesmal die Gesamtenergie und den Drehimpuls in der Beziehung zur durch den Ursprung und senkrecht zur Bewegungsfläche gehenden Achse ausdrücken.

$$E = -\frac{GMm}{r+R} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\Phi}^2 \quad (110)$$

$$L = mr^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\Phi} \quad (111)$$

Mit dem Ausnutzen der Beziehungen (108) und (109) können wir die Ausdrücke in

$$E = -\frac{GMm}{r\left(1+\frac{m}{M}\right)} + \frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)r^2\dot{\varphi}^2 \quad (112)$$

$$L = m\left(1+\frac{m}{M}\right)r^2\dot{\varphi} \quad (113)$$

bearbeiten.

Wir merken, dass E und L schon mit den Ausgangsbedingungen als

$$E = -\frac{GMm}{r_0\left(1+\frac{m}{M}\right)} + \frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)\dot{r}_0^2 + \frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)r_0^2\dot{\varphi}_0^2 \quad (114)$$

$$L = m\left(1+\frac{m}{M}\right)r_0^2\dot{\varphi}_0 \quad (115)$$

gegeben sind.

Die Gleichungen, die dank der Erhaltung E und L gelten, sind also nach dem Teilen durch $m\left(1+\frac{m}{M}\right)$ in der Form

$$-\frac{GM}{r_0\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} + \frac{1}{2}\dot{r}_0^2 + \frac{1}{2}r_0^2\dot{\varphi}_0^2 = -\frac{GM}{r\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} + \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 \quad (116)$$

$$r_0^2\dot{\varphi}_0 = r^2\dot{\varphi}, \quad (117)$$

was fast die gleiche Form ist, als ob wir die Bewegung des zentralen Körpers vernachlässigt hätten. Der einzige Unterschied ist, dass der zentrale Körper scheint, eine niedrigere Masse

$$M' = \frac{M}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} \quad (118)$$

zu haben.

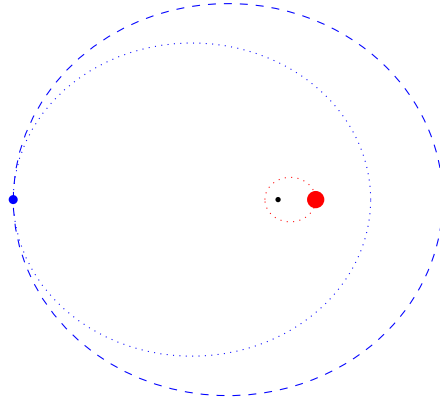


Abbildung 4: Vergleichung der Bahnen mit (gestrichelt) und ohne (gepunktet) Vernachlässigung der Bewegung des roten Körpers.

Wenn wir M' einführen, bleiben auch die Bewegungsgleichungen in der gleichen Form.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \quad (119)$$

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{(r+R)^2} + r\dot{\varphi}^2 \quad (120)$$

oder

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \quad (121)$$

$$\ddot{r} = -\frac{GM'}{r^2} + r\dot{\varphi}^2. \quad (122)$$

Also wenn wir den zentralen Körper auch bewegen lassen, wird sich der umlaufende Körper in dem Schwerpunktinertialsystem so bewegen, als ob sich im Schwerpunkt ein nicht bewegender Körper mit der Masse M' befinden würde. Außerdem ist es nötig die Positionen und die Geschwindigkeiten neu zu berechnen, so dass sie dem Schwerpunktinertialsystem entsprechen.

Für eine bessere Vorstellung können wir sagen, dass wenn wir dem zentralen Körper erlauben sich zu bewegen, wird seine Masse aus der Sicht des umlaufenden Körpers scheinen kleiner zu sein. Aber der Punkt, um den der Körper umläuft, ist ihm näher und zusätzlich hat der umlaufende Körper in dem Bezugssystem, in dem der Schwerpunkt und nicht der zentrale Körper in der Ruhe ist, eine niedrigere Ausgangsgeschwindigkeit, weil der zentrale Körper nun auch ein Teil der ursprünglichen Geschwindigkeit haben muss. Das Bild 4 zeigt, wie die Bahnen des umlaufenden und des zentralen Körpers aussehen, wenn wir die Bewegung des zentralen Körpers nicht vernachlässigen. Auf dem Bild gibt es die Bahn des blauen Körpers, wenn wir voraussetzen, dass sich der zentrale Körper nicht bewegen kann, und die Bahnen der beiden Körper, wenn wir voraussetzen, dass sich die beiden Körper bewegen können. Wir müssen darauf aufmerksam machen, dass im Interesse das Bild übersichtlicher zu machen, wir für die erste Bahn den Bezugssystem verwenden, der mit dem zentralen Körper verbunden ist, aber für die nächsten zwei Bahnen verwenden wir den Bezugssystem, der mit dem Schwerpunkt verbunden ist. In allen Fällen erhalten wir aber die relative Ausgangsgeschwindigkeit zwischen den Körpern. Es ist auch wichtig zu erkennen, dass im Gegensatz zu unserem Bild 4 der Quotient aus der Masse des zentralen und des umlaufenden Körpers in dem Sonnensystem viel größer ist, deswegen sind die Bahnen nicht wirklich so unterschiedlich.

8.2 Andere Ungenauigkeiten

Es gibt viele Einflüsse, die unsere Prognosen beeinflussen können. Ganz bedeutend kann die Gravitationswirkung anderer Körper sein. Im Sonnensystem handelt es sich um verschiedene Planeten, die gegenseitig von den vorhergesagten Bahnen abweichen können.

Darüber hinaus zeigt sich, dass weder die newtonsche Mechanik (noch ihre lagrangesche Reformulierung) in der Beschreibung des Weltalls präzise war. Präziser ist das Benehmen der Planeten mit der Relativitätstheorie beschrieben. Der Umlauf der Planeten wird mit der Gravitation verursacht, so dass wir in der allgemeinen

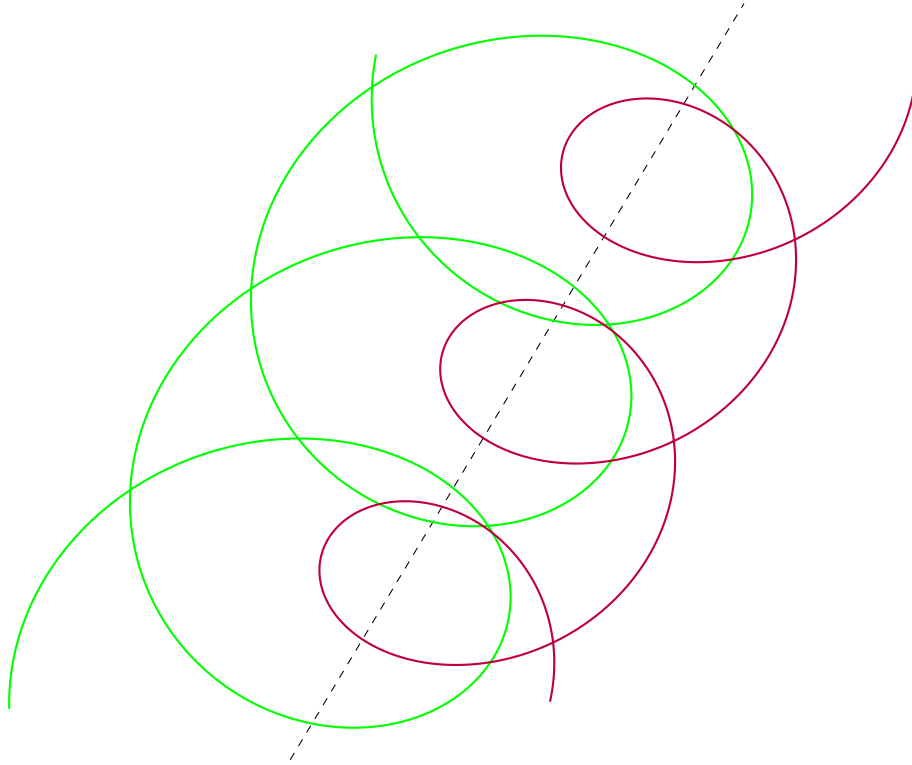


Abbildung 5: Eine Visualisierung der Bahnen der sich umlaufenden Körper, deren Schwerpunkt nicht in der Ruhe ist.

Relativitätstheorie arbeiten müssten. Wir erwähnen nur das, dass laut ihrer Prognosen auch die Erscheinungen zur Geltung kommen, die wir hier nicht erwähnt haben. Zu ihnen gehören z.B. die Präzession der Umlaufbahnen oder der Energieverlust durch Ausstrahlung der Gravitationswellen (wir sind aber fähig, sie nur bei der Bewegung der viel schwereren Körper zu beobachten).

9 Hinweise

9.1 Porträts

Johannes Kepler

By Unidentified painter - Unknown, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=470711>

Tycho Brahe

By Eduard Ender (1822-1883) - <http://cache.eb.com/eb/image?id=83677&rendTypeId=4> Now redirects to <http://media.web.britannica.com/eb-media/77/83677-004-72A98E5A.jpg>, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=822362>

Isaac Newton

By After Godfrey Kneller - <http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html>, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=37337>

Josepf-Louis Lagrange

Von Unbekannt - http://www.hrono.ru/biograf/bio_1/lagranzhzh.html, Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7293609>

Albert Einstein

By Unknown - Official 1921 Nobel Prize in Physics photograph, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=458521>

9.2 Verwendete Quellen

Historische Informationen, die wir ausgenutzt haben, stehen frei zur Verfügung auf

https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler

https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange

https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein

ŠOLCOVÁ, Alena. *Johannes Kepler*. Prometheus, Prag, 2004.

FERGUSONOVÁ, Kitty. *Tycho a Kepler. Nesourodá dvojice, jež jednou provždy změnila náš pohled na vesmír*. Academia, Prag, 2009. Aus dem Original *Tycho & Kepler. The Unlikely Partnership That Forever Changed Our Understanding of the Heavens*. Walker & Company, New York, 2002.

Der Rest dieser Arbeit haben wir nur mit Hilfe unseres eigenen bisherigen Wissens durch eigene mathematische und physikalische Überlegungen erarbeitet.

9.3 Erstellung des Dokuments

Die ganze Arbeit ist in dem \LaTeX System geschrieben. Alle Bilder außer der fünf Porträts an dem Anfang haben wir für diese Arbeit selbst in dem *TikZ* System erstellt.